WYBRANE PROBLEMY STATYSTYKI WIELOWYMIAROWEJ

4. Wektor X ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej μ i nieosobliwej macierzy kowariancji Σ. Niech u_1 i u_2 będą jednostkowymi i ortogonalnymi wektorami własnymi macierzy Σ, odpowiadającymi wartościom własnym $\lambda_1 \geq \lambda_2$ >0. Oznaczmy przez U i Λ macierze $U = [u_1 | u_2]$ i

Λ =diag $\{\lambda_1, \lambda_2\}$= $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

a) Pokaż, że zachodzi równość $\Sigma U = U\Lambda$ oraz $\Sigma = U\Lambda U'$ i $\Sigma^{-1} = U'\Lambda^{-1}U$. Jaką postać ma macierz Λ^{-1} ? Wyraź wyznacznik macierzy Σ za pomocą jej wartości własnych (Wskazówka: skorzystaj z równości $\Sigma = U\Lambda U'$). Czy udowodnione przez ciebie równości są prawdziwe dla p-wymiarowego wektora normalnego?

b) Pokaż, że wyrażenie $(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$ przybierze postać: $\dfrac{(y_1-\nu_1)^2}{\lambda_1} + \dfrac{(y_2-\nu_2)^2}{\lambda_2}$, gdy Y i ν będą współrzędnymi X i μ wyrażonymi w bazie $\{u_1,u_2\}$.

5. Można udowodnić, że zmienna losowa $(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$ ma rozkład χ^2_2 (z dwoma stopniami swobody). Znajdź wartości $c_{0,95}$ i $c_{0,99}$ o tej własności, że $P((X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu) \leq c) \geq 1-\alpha$ dla $\alpha = 0{,}05$ i $\alpha = 0{,}01$. Jakie wartości X można spotkać z prawdopodobieństwem co najmniej 95% jeśli ma on dwuwymiarowy rozkład normalny o wartości średniej μ =[170,70], odchylenia standardowe σ_1=8, $\sigma_2 = 5$ gdy x_2=70 i x_2=60 i współczynnik korelacji wynosi:

a) R=0 b) R=0.5 c) R=0.9

Wskazówka: wykorzystaj postać opisaną w zad 4 b) . Korzystając z arkusza kalkulacyjnego Excel użyj opcji Narzędzia -> Szukaj wyniku

6. Załóżmy, że rozkład wektora (Lotka 1, Lotka 3) jest normalny i że parametrami tego rozkładu są wyniki, uzyskane z próby:

	H (n=14)		O (n=17)	
	Lotka 1	Lotka 3	Lotka 1	Lotka 3
Średnia	53,41	40,51	59,83	43,62
s	8,98	3,50	7,73	4,25
korelacja	0,4655		0,5303	

Dla każdego z dwóch gatunków muchołówek (*Empidonax hammondi* (H) i *Empidonax oberholseri* (O)):

a) Napisz wzór na gęstość rozkładu (Lotka 1, Lotka 3)

b) Znajdź wartości własne macierzy kowariancji i kierunki główne rozkładu.

c) Skonstruuj 95% elipsę ufności dla wartości oczekiwanej wektora (Lotka 1, Lotka 3)

d) Wykonaj a)-c) dla różnicy między długościami lotki 1 i lotki 3 u obu gatunków, zakładając, że odchylenia standardowe i kowariancje są w obu grupach takie same. Czy wektor (0,0) należy do wnętrza tej elipsy?

e) Porównaj uzyskane wyniki z wynikami z zad.3. Czy jest jakaś różnica?